

PARAGRAAF 9.1 : LOGARITMEN

LES 1 LOGARITMEN

DEFINITIE LOGARITMEN

- Hoofdregel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g\log(b)$ met domein $b > 0$

Voor logaritmen uit je hoofd berekenen gebruik je de hulpregel

- Hulpregel : ${}^g\log(g)^t = t$

VOORBEELD 1

Bereken uit je hoofd

- a. ${}^3\log(9) =$
- b. ${}^3\log(\sqrt{27})$
- c. ${}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)$

OPLOSSING 1

- a. ${}^3\log(9) = {}^3\log(3^2) = 2$
- b. ${}^3\log(\sqrt{27}) = {}^3\log(\sqrt{3^3}) = {}^3\log\left((3^3)^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3\log\left(3^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}$
- c. ${}^2\log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$

VOORBEELD 2

Bereken exact

a. ${}^5\log(2x - 1) = 3$

b. $4 \cdot {}^2\log(2x) + 1 = 13$

OPLOSSING 2

Je kunt dit op twee manieren oplossen :

- Met de hoofdregel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g\log(b)$
- Met de hulpregeel : ${}^g\log(g^t) = t$

a. ${}^5\log(2x - 1) = 3$	Of	${}^5\log(2x - 1) = 3$
$2x - 1 = 5^3$	Of	${}^5\log(2x - 1) = 3$
$2x - 1 = 125$	Of	${}^5\log(2x - 1) = {}^5\log(5^3)$
$2x = 126$	Of	$2x - 1 = 125$
$x = 63$	Of	$2x = 126$
		$x = 63$

b. Deze doen we alleen met de hoofdregel

$$4 \cdot {}^2\log(2x) + 1 = 13$$

$$4 \cdot {}^2\log(2x) = 12$$

$${}^2\log(2x) = 3$$

$$2x = 2^3$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

LES 2 : GRAFIEKEN EN ONGELIJKHEDEN

STAPPENPLAN LOGARITMISCHE ONGELIJKHEDEN

- | | |
|--|-----|
| (0) Bepaal het domein | |
| (1) Los de vergelijking op | (I) |
| (2) Maak een schets van de twee grafieken. Let op het domein!!!! | (S) |
| (3) Lees de oplossing af uit de schets. | (A) |

VOORBEELD 1

Gegeven $f(x) = {}^4\log(x+2)$ en $g(x) = {}^4\log(5-x)$.

- Bepaal de domeinen van f en g .
- Los op : $f(x) \leq g(x)$

OPLOSSING 1

a. Domein f : $x + 2 > 0$
 $x > -2$ (VA : $x = -2$)

Domein g : $5 - x > 0$
 $x < 5$ (VA : $x = 5$)

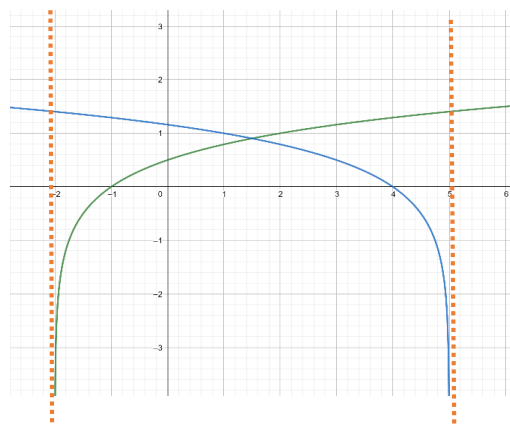
b. (1) ${}^4\log(x+2) = {}^4\log(5-x)$
 $x + 2 = 5 - x$
 $2x = 3$
 $x = 1\frac{1}{2}$ { of met de GR en intersect als er geen exact/alg. staat }

(2) Schets (met knop logbase)

$$Y1 = \log_4(x+2)$$

$$Y2 = \log_4(5-x)$$

(3) $-2 < x \leq 1\frac{1}{2}$



LES 3 : EXPONENTIËLE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN EN OMSCHRIJVEN

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $3^{x+4} = 20$

b. $5 \cdot 2^{3x-1} = 100$

OPLOSSING 1

a. $3^{x+4} = 20$ { Gebruik de hoofdregel $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g\log(b)$ }

$$x + 4 = {}^3\log(20)$$

$$x = {}^3\log(20) - 4$$

b. $5 \cdot 2^{3x-1} = 100$

$$2^{3x-1} = 20$$

$$3x - 1 = {}^2\log(20)$$

$$3x = {}^2\log(20) + 1$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(20) + \frac{1}{3}$$

VOORBEELD 2

Maak x vrij bij de formule $y = 3^{x+4} - 20$

{ Schrijf als $x = \dots$ }

OPLOSSING 2

$$y = 3^{x+4} - 20$$

$$y + 20 = 3^{x+4}$$

$$x + 4 = {}^3\log(y + 20)$$

$$x = {}^3\log(y + 20) - 4$$

PARAGRAAF 9.2 : REKENREGELS BIJ LOGARITMEN

LES 1 : LOGARITMISCHE VERGELIJKINGEN

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 regels zijn :

(1) ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$	${}^3\log(5) + {}^3\log(x) = {}^3\log(5x)$
(2) ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$	${}^2\log(10) - {}^2\log(5) = {}^2\log\left(\frac{10}{5}\right) = 1$
(3) ${}^g\log(a^k) = k \cdot {}^g\log(a)$	${}^3\log(a^5) = 5 \cdot {}^3\log(a)$
(4) ${}^g\log(g)^t = t$	${}^7\log(7)^5 = 5$

Er zijn ook nog een aantal regels die handig kunnen zijn :

(5) ${}^g\log(1) = 0$	${}^7\log(1) = {}^7\log(7^0) = 0$
(6) $\log(a) = {}^{10}\log(a)$	$\log(3) = {}^{10}\log(3)$
(7) ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$	${}^8\log(20) = \frac{\log(20)}{\log(8)}$
(8) ${}^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^g\log(a)$	${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = -{}^3\log(x)$

VOORBEELD 1

Bereken exact met de rekenregels

a. ${}^3\log(6) + {}^3\log(12)$

b. ${}^3\log(25) + \frac{1}{3}\log(5)$

c. $2 \cdot {}^3\log(6) - {}^3\log(12) =$

OPLOSSING 1

a. ${}^3\log(6) + {}^3\log(12) = {}^3\log(6 \cdot 12) = {}^3\log(72)$

b. ${}^3\log(25) + \frac{1}{3}\log(5) = {}^3\log(5^2) - {}^3\log(5) = 2 \cdot {}^3\log(5) - {}^3\log(5) = {}^3\log(5)$

c. $2 \cdot {}^3\log(6) - {}^3\log(12) = {}^3\log(6^2) - {}^3\log(12) = {}^3\log(36) - {}^3\log(12)$

$${}^3\log\left(\frac{36}{12}\right) = {}^3\log(3) = 1 \quad \{ \text{want } 3^1 = 3 \}$$

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op

a. $2 + {}^4\log(x) = {}^4\log(12 - 3x)$

b. ${}^2\log(x + 5) - \frac{1}{2}\log(x + 2) = 2$

c. ${}^2\log^2(x) + {}^2\log(x) = 6$

OPLOSSING 2

a.

$$2 + {}^4\log(x) = {}^4\log(12 - 3x)$$

$${}^4\log(4^2) + {}^4\log(x) = {}^4\log(12 - 3x)$$

$${}^4\log(16x) = {}^4\log(12 - 3x)$$

$$16x = 12 - 3x$$

$$19x = 12$$

$$x = \frac{12}{19}$$

b. Er geldt : $\frac{1}{2}\log(x+2) = -{}^2\log(x+2)$.

Dit geeft :

$${}^2\log(x+5) + {}^2\log(x+2) = 2$$

$${}^2\log((x+5) \cdot (x+2)) = {}^2\log(2^2)$$

$${}^2\log(x^2 + 7x + 10) = {}^2\log(4)$$

$$x^2 + 7x + 10 = 4$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$(x+6) \cdot (x+1) = 0$$

$$x = -6 \quad \vee \quad x = -1$$

(V.N.)

c.

$$({}^2\log(x))^2 + {}^2\log(x) = 6 \quad \{Stel \ {}^2\log(x) = p\}$$

$$p^2 + p - 6 = 0$$

$$(p+3) \cdot (p-2) = 0$$

$$p = -3 \quad \vee \quad p = 2$$

$${}^2\log(x) = -3 \quad \vee \quad {}^2\log(x) = 2$$

$$x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \vee \quad x = 4$$

LES 2 EXPONENTIELE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $3 \cdot 4^{2x+1} = 48$

b. $5^{2x} - 5^x = 12$

c. $6^{2x+1} - 6^{x-1} = 1$

OPLOSSING 1

a. $4^{2x+1} = 16 = 4^2$

$$2x + 1 = 2$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

b. $(5^x)^2 - 5^x - 12 = 0 \quad \{Stel \ 5^x = p\}$

$$p^2 - p - 12 = 0$$

$$(p - 4) \cdot (p + 3) = 0$$

$$p = 4 \quad \vee \quad p = -3$$

$$5^x = 4 \quad \vee \quad 5^x = -3 \text{ (KN)}$$

$$x = {}^5\log(4)$$

c. $6 \cdot 6^{2x} - 6^{-1} \cdot 6^x = 1$

$$6 \cdot 6^{2x} - \frac{1}{6} \cdot 6^x - 1 = 0 \quad \{Stel \ 6^x = p\}$$

$$6 \cdot p^2 - \frac{1}{6} p - 1 = 0$$

$$36p^2 - p - 6 = 0$$

$$abc\text{-formule: } p = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 216}}{72} = \frac{1 \pm \sqrt{217}}{72}$$

PARAGRAAF 9.3 : EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FORMULES

LES 1 VERDUBBELINGS- EN HALVERINGSTIJD

VOORBEELD 1

Sjors heeft 800 vlinders. Iedere dag daalt de populatie met 6%.

- a. Bepaal de formule.
- b. Bereken aan het begin van welke dag het aantal vlooien voor het eerst (meer dan) gehalveerd is.

OPLOSSING 1

a. $N = 800 \cdot 0,94^t$.

b. $400 = 800 \cdot 0,94^t$

$$\frac{1}{2} = 0,94^t$$

$$t = {}^{0,94}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 11,2 \quad \{ \text{Of met intersect als er alleen bereken staat} \}$$

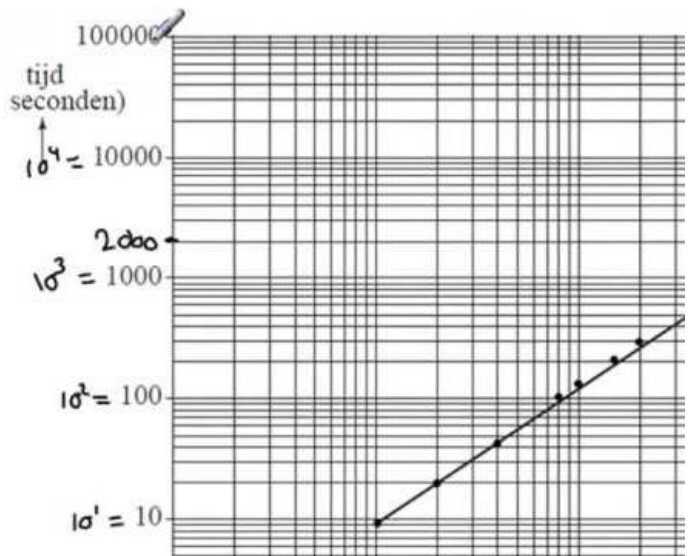
Dus op de 12^e dag.

LES 2 : FORMULES OP LOGARITMISCH PAPIER

THEORIE LOGARITMISCH PAPIER

Op logaritmisch papier is :

- de macht lineair (iedere keer + 1)
- wordt in een stapje alles 10 keer zo groot
- de formule $y = b \cdot g^t$ (exponentiële) is een rechte lijn (en NIET $y = ax + b$) !!!!



VOORBEELD 1

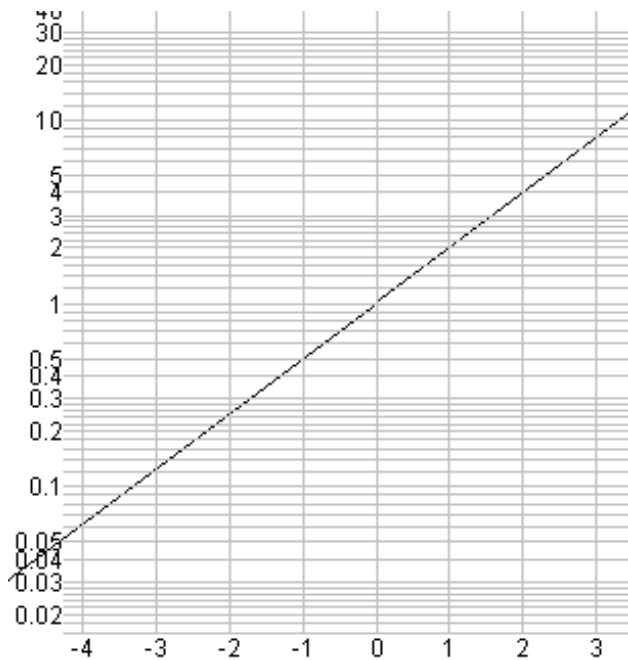
Aflezen A,B,C,D,E en F op blz. 32 log papier.

STAPPENPLAN EXPONENTIËLE FORMULE

- (1) Formule $y = b \cdot g^t$
- (2) Groeifactor berekenen $g_{...dagen} = \frac{\text{Achterste}}{\text{Voorste}}$
- (3) Beginwaarde b berekenen door een punt in te vullen
- (4) Formule opschrijven

VOORBEELD 2

Gegeven is de volgende lijn. Bepaal de formule van de lijn



OPLOSSING 2

Je kunt gebruik maken van het stappenplan uit paragraaf 10.4. Lees twee punten af, bijvoorbeeld $(-1, \frac{1}{2})$ en $(2, 4)$

(1) Rechte lijn dus $y = b \cdot g^t$

(2) $g^3 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

$$g = \sqrt[3]{8} = 2$$

(3) $y = b \cdot 2^t$ en $(2, 4)$ invullen $\rightarrow 4 = b \cdot 2^2$

$$\rightarrow b = 1$$

(4) Dus $y = 1 \cdot 2^t$

OPMERKING

Bij dubbellogpapier zijn beide assen logaritmisch.

LES 3 : VERSCHUIVEN EN VERMENIGVULDIGEN

DEFINITIES TRANSLATIES

- $T(p,q) = \{ \text{Translatie / verschuiving van de grafiek } p \text{ naar rechts en } q \text{ omhoog} \}$
- $V_{x-as, c} = \{ \text{Vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met factor } c \}$
- $V_{y-as, c} = \{ \text{Vermenigvuldiging t.o.v. de y-as met factor } c \}$

REGELS BIJ TRANSLATIES

$$(1) f(x) \xrightarrow{T(a,b)} f(x-a) + b$$

$$(2) f(x) \xrightarrow{V_{x-as, c}} c \cdot f(x)$$

$$(3) f(x) \xrightarrow{V_{y-as, c}} f\left(\frac{1}{c} \cdot x\right)$$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4^x + 3$.

- Bepaal de formule die ontstaat als f eerst 5 naar rechts en 2 omlaag verschoven wordt en vervolgens vermenigvuldigd wordt met 3 t.o.v. de x-as.
- Bepaal de formule die ontstaat als

- f eerst vermenigvuldigd wordt met $\frac{1}{3}$ t.o.v de y-as
- Dan 3 naar links verschoven wordt
- f eerst vermenigvuldigd wordt met -2 t.o.v de x-as

- Gegeven $g(x) = 4^x$. Welke vermenigvuldiging t.o.v. de x-as is gelijk aan een verschuiving van 2 naar links ?

OPLOSSING 1

$$a. 4^x + 3 \xrightarrow{T(5,2)} 4^{x-5} + 3 - 2 \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot (4^{x-5} + 1) = 3 \cdot 4^{x-5} + 3$$

$$b. 4^x + 3 \xrightarrow{V_{y-as,3}} 4^{\frac{1}{3}x} + 3 = 4^{3x} + 3 \xrightarrow{T(-3,0)} 4^{3(x-3)} + 3 = 4^{3x-9} + 3$$

$$4^{3x-9} \xrightarrow{V_{x-as,-2}} -2(4^{3x-9} + 3) = -2 \cdot 4^{3x-9} - 6$$

$$c. 4^x \xrightarrow{T(-2,0)} 4^{x+2} = 4^2 \cdot 4^x = 16 \cdot 4^x$$

Dus een vermenigvuldiging van 16 t.o.v. de x-as.

PARAGRAAF 9.4 : HET GETAL E

LES 1 : HET GETAL E

We kijken naar een paar afgeleiden

VOORBEELDEN

- a. $f(x) = 2,5^x \rightarrow f'(x) = 0,916 \cdot 2,5^x$
 b. $f(x) = 3^x \rightarrow f'(x) = 1,10 \cdot 3^x$
 c. $f(x) = 2,718...^x = e^x \rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x = e^x$

DIFFERENTIËREN e^x

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

OPMERKING

- Omdat e een getal is (en wel $\approx 2,718...$) is $e^2 \approx 7,389..$ ook een getal en dus alle machten zijn getallen

VOORBEELD 1

Herleid

- a. $3e + 6e =$
 b. $3e^2 \cdot 13e^2 =$
 c. $\frac{e^{2x-9}}{e^{x-3}} =$
 d. $(1 + e^{3x})^2 =$

OPLOSSING 1

- a. $9e$
 b. $39e^4$
 c. $\frac{e^{2x-9}}{e^{x-3}} = \frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^{x-3}} = e^x + 3$
 d. $(1 + e^{3x})^2 = (1 + e^{3x})(1 + e^{3x}) = 1 + e^{3x} + e^{3x} + e^{6x} = e^{6x} + 2e^{3x} + 1$

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op

a. $xe^{3x} = 2e^{3x}$

b. $e^{3x} - e^6 = 0$

OPLOSSING 2

a. $xe^{3x} - 2e^{3x} = 0$

$$e^{3x}(x - 2) = 0$$

$$e^{3x} = 0 \vee x - 2 = 0$$

$$3x = {}^e\log(0) \quad \vee \quad x = 2$$

(K.N.)

b. $e^{3x} = e^6$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

- Hoofdregel voor e-machten : $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- Ook bij e-machten kun je productregel, quotiëntregel of kettingregel nodig hebben!!!

VOORBEELD 1

Differentieer

- $f(x) = 5e^{3x}$
- $f(x) = 4xe^x$
- $f(x) = e^{x^2}$
- $f(x) = \frac{3x-5}{e^{2x}}$

OPLOSSING 1

Differentieer

- $f'(x) = 5e^{3x} \cdot 3 = 15e^{3x}$
- $f'(x) = 4xe^x + 4e^x$
- $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$
- $$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x-5) - 3e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$f'(x) = \frac{6xe^{2x} - 10e^{2x} - 3e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$f'(x) = \frac{6xe^{2x} - 13e^{2x}}{e^{4x}} =$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(6x-13)}{e^{2x} \cdot e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{6x-13}{e^{2x}}$$

PARAGRAAF 9.5 : DE NATUURLIJKE LOGARITME

LES 1 : WAT IS LN(X)

THEORIE LN(X)

- $\ln(x) = \{ \text{de natuurlijke logaritme van } x \}$
- $\ln(x) = {}^e\log(x)$

Omdat $\ln(x)$ een logaritme is gelden alle logaritme regels! Bijvoorbeeld :

- $\ln(e^x) = {}^e\log(e^x) = x \{ {}^g\log(g^x) = x \}$
- $\ln(e^3) = 3$

VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen exact op.

Denk aan de regel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g\log(b)$.

- a. $e^x = 10$
- b. $e^{2x+1} = 18$

OPLOSSING 1

- a. $e^x = 10$
 $x = {}^e\log(10) = \ln(10)$
- b. $e^{2x+1} = 18$
 $2x + 1 = {}^e\log(18) = \ln(18)$
 $2x = \ln(18) - 1$
 $x = \frac{1}{2}\ln(18) - \frac{1}{2}$

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 logaritme regels in ln-vorm zijn :

(1) $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$

(2) $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

(3) $\ln(a^k) = k \cdot \ln(a)$

(4) $\ln(e^t) = t$

VOORBEELD 2

Herleid tot één vorm

a. $\ln(e^2) =$

b. $\ln(3) + \ln(13) =$

c. $\ln^2(e) + 2 =$

d. $\ln(3) + 2 =$

OPLOSSING 2

a. $\ln(e^2) = 2$

b. $\ln(3) + \ln(13) = \ln(3 \cdot 13) = \ln(39)$

c. $\ln^2(e) + 2 = (\ln(e))^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

d. $\ln(3) + 2 = \ln(3) + \ln(e^2) = \ln(3e^2)$

VOORBEELD 3

Los de vergelijkingen exact op

- a. $2x \ln(x) = \ln(x)$
- b. $\ln(x) - \ln(3x + 1) = 1$
- c. $\ln^2(4x) = 9$

OPLOSSING 3

a. $2x \ln(x) = \ln(x)$
 $2x \ln(x) - \ln(x) = 0$
 $\ln(x) [2x - 1] = 0$
 $\ln(x) = 0 \vee 2x - 1 = 0$
 $x = e^0 = 1 \vee x = \frac{1}{2}$

b. $\ln(x + 1) - \ln(x) = 1$
 $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(e^1)$
 $\frac{x+1}{x} = e$
 $x + 1 = ex$
 $x - ex = -1$
 $x(e - 1) = -1$
 $x = -\frac{1}{e-1}$

c. $\ln^2(4x) = 9$
 $(\ln(4x))^2 = 9$
 $p^2 = 9$
 $p = 3 \vee p = -3$
 $\ln(4x) = 3 \vee \ln(4x) = -3$
 $4x = e^3 \vee 4x = e^{-3}$
 $x = \frac{1}{4}e^3 \vee x = \frac{1}{4}e^{-3}$

{ Neem $p = \ln(4x)$ }

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FUNCTIES

DIFFERENTIËREN VAN LOGARITMISCHE FUNCTIES

$$(1) f(x) = {}^g\log(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(g)} \quad (\text{Hoofdregel})$$

$$(2) f(x) = \ln(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

DIFFERENTIËREN VAN EXPONENTIËLE FUNCTIES

$$(3) f(x) = a^x \quad \rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \quad (\text{Hoofdregel})$$

$$(4) f(x) = e^x \quad \rightarrow f'(x) = e^x$$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 3x \ln(x)$

b. $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$

c. $f(x) = \ln^3(x)$

d. $f(x) = {}^3\log(6x + 7)$

e. $f(x) = 3 \cdot 4^x$

f. $f(x) = 5^{x^2-6x}$

OPLOSSING 1

a. $f'(x) = 3 \cdot \ln(x) + 3x \cdot \frac{1}{x} = 3 \ln(x) + 3$

b. $f'(x) = \frac{1}{x^2+5x} \cdot (2x+5) = \frac{2x+5}{x^2+5x}$

c. Schrijf iets anders : $f(x) = \ln^3(x) = (\ln(x))^3$

$$f'(x) = 3 \cdot \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}$$

d. $f'(x) = \frac{1}{(6x+7)\ln(3)} \cdot 6$

e. $f(x) = 3 \cdot \ln(4) \cdot 4^x$

f. $f(x) = \ln(5) \cdot 5^{x^2-6x} \cdot (2x-6)$